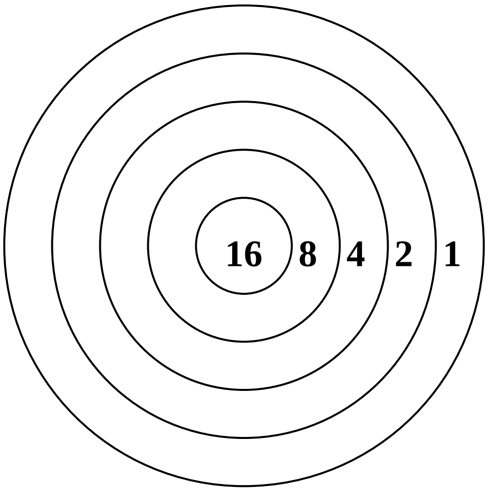
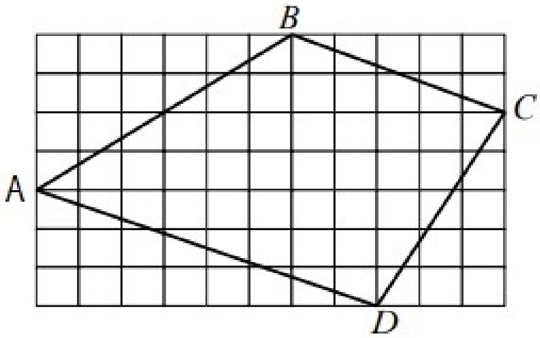
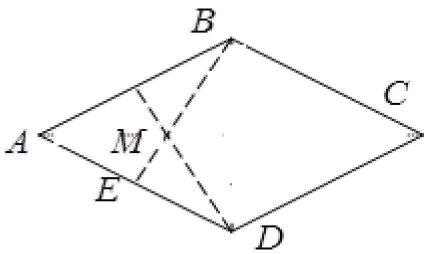
2018-2019 н.р.

Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики для учнів 7 класу

1.	Дід сам випиває діжечку квасу за 14 днів, а разом з бабою випиває таку ж діжечку квасу за 10 днів. За скільки днів одна баба вип'є таку ж діжечку квасу?	7б
2.	Звичайна шашка знаходиться в крайньому нижньому лівому полі шахової дошки. Скількома різними способами вона може пройти в дамки? Способи вважаються різними, якщо вони відрізняються один від одного хоча б одним ходом.	7б
3.	На шкільній олімпіаді з математики було запропоновано для розв'язування 7 задач. За кожну задачу, розв'язану правильно, нараховували 5 балів, а за кожну задачу, розв'язану неправильно, знімали 3 бали. Скільки задач правильно розв'язав Сашко, якщо він отримав на олімпіаді з математики 19 балів?	7б
4.	Мішень для стрільби з лука має зображений на рисунку вигляд. Яку найменшу кількість пострілів повинен зробити спортсмен, щоб вибити рівно 55 очок? Відповідь обґрунтуйте. 	7б
5.	У квадраті 3x3 клітинки верхня ліва вершина позначена літерою А. Скільки можна побудувати трикутників, однією з вершин яких є точка А, а дві інші вершини – будь-які вершини квадратиків 1x1 даного квадрата?	7б

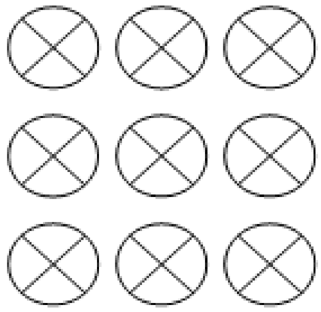
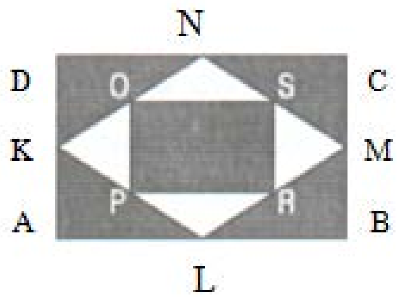
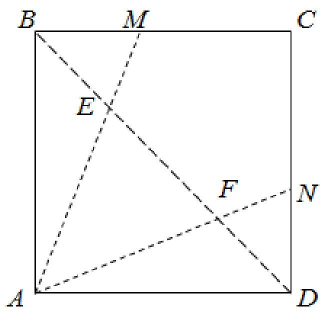
2018-2019 н.р.

Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики для учнів 8 класу

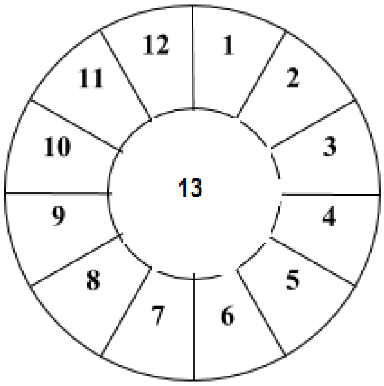
<table>
<tr><td>1.</td><td>Є двоє пісочних годинників: на 7 хвилин і на 11 хвилин. Куряче яйце вариться 15 хвилин. Як відміряти цей час за допомогою наявних годинників?</td><td>7б</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>Порівняй значення виразів 9999^{10} і 99^{20}</td><td>7б</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>Чому дорівнює площа чотирикутника ABCD, що зображений на рисунку, якщо сторона малого квадратика (1 клітинки) дорівнює 1 см?

</td><td>7б</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Майстер проводив сеанс одночасної гри в шахи. За перші дві години він виграв 10% партій, а 8 партій програв. До закінчення сеансу він виграв у 10% суперників, що залишилися, одну партію програв, а останні 8 партій звів у нічию. На скількох дошках проводилась гра?</td><td>7б</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Дві висоти ромба, проведені з вершин його тупих кутів, перетинаються та діляться у відношенні 1:2. Знайдіть кути ромба.

</td><td>7б</td></tr>
</table>

2018-2019 н.р.

Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики для учнів 9 класу

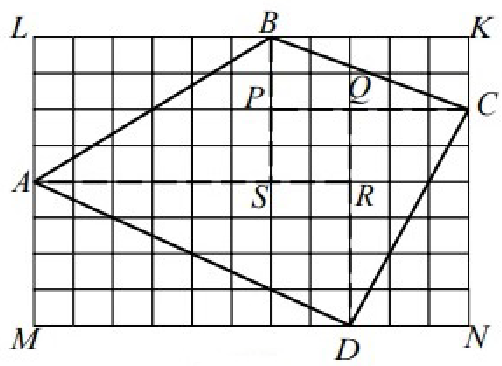
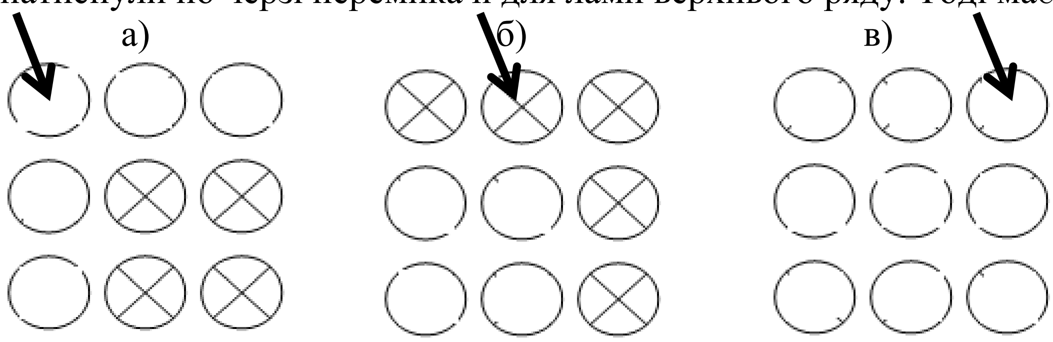
1.	Скільки існує трицифрових чисел з ненульовими цифрами, які мають таку властивість: при будь-якій перестановці цифр отримаємо трицифрове число, що ділиться націло на 4 ?	7б
2.	Лампи розташовані у вигляді квадрата 3×3, як це показане на рисунку. Лампи можуть бути у стані «горить» чи «не горить». На кожній лампі є перемикач. При натисканні перемикача на будь-якій лампі змінюють свій стан на протилежний («горить» на «не горить» та навпаки) усі лампи, що розташовані в одному рядку та одному стовпчику з цією лампою. На початку усі лампи «не горять». Яку найменшу кількість натискань перемикачів треба зробити, щоб усі лампи стали у стані «горить»? 	7б
3.	На малюнку точки K, L, M, N є серединами сторін прямокутника ABCD. Аналогічно, точки O, P, R, S є серединами сторін ромба KLMN. Яка частина площі прямокутника ABCD зафарбована? 	7б
4.	Четверо хлопців помітили, що якщо троє з чотирьох складуть свої гроші до купи, то без першого у них буде 90 грн, без другого – 85, без третього – 80, без четвертого – 75 грн. Скільки грошей у кожного з хлопців?	7б
5.	На діагоналі BD квадрата $ABCD$ вибрані точки E та F таким чином, що пряма AE перетинає сторону BC у точці M, а пряма AF перетинає сторону CD у точці N. Відомо, що $CM = CN$, $BE = 3$ см та $EF = 4$ см. Знайдіть довжину діагоналі BD. 	7б

2018-2019 н.р.
Завдання I етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики для учнів 11 класу

1.	Скількома способами можна розфарбувати всі 13 частин у три кольори так, щоб жодні дві частини, пофарбовані однаково, не мали спільної межі? Два розфарбування вважаються різними, якщо хоча б одна з 13 частин пофарбована по-різному. 	7б
2.	На нараду в міністерство для обговорення питань олімпіад запросили 30 Заслужених вчителів України з математики, фізики, хімії та біології. Серед запрошених фізиків та біологів разом виявилось удвічі менше ніж математиків, а фізиків та хіміків разом удвічі більше ніж біологів. Скільки на зустріч запросили математиків, якщо вчителів з кожного предмету була різна кількість?	7б
3.	Деякі числа a і b ($a \neq 0$; $b \neq 0$) задовольняють умови: $$6a + 6b = \frac{25}{a} + \frac{25}{b} = 25.$$ Знайдіть значення виразу $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$?	7б
4.	Розв’яжіть рівняння: $$x^4 + 10x^3 - 125x - 54 = 0$$	7б
5.	Від даного трикутника трьома прямими, паралельними сторонам трикутника, відрізаються три трикутники так, що утворюється рівносторонній шестикутник. Знайдіть довжину сторони шестикутника, якщо довжини сторін трикутника рівні *a*. *b* та *c*.	7б

ВІДПОВІДІ:

клас	№ завдання	Відповідь
7	1.	НСК (14; 10) = 70. Отже, за 70 днів один дід вип'є 70:14=5 діжечок квасу, а дід і баба разом вип'ють 70:10=7 діжечок квасу. Отже, одна баба за 70 днів вип'є 7 – 5= 2 діжечки квасу. А одну діжечку квасу баба вип'є за 70 : 2 = **35 днів**.
	2.	На другу горизонталь шашка може перейти одним способом, на третю – двома, на четверту – трьома, на п'яту – шістьма, на шосту – дев'ятьма, на сьому горизонталь – двадцятьма способами, а пройти в дамки шашка може **35 способами**.
	3.	Нехай Сашко розв'язав правильно x задач, тоді неправильно він розв'язав $(7 – x)$ задач. За правильно розв'язані задачі Сашко отримав $5x$ балів, а за неправильно розв'язані з нього зняли $3(7– x)$ балів. Складаємо рівняння $5x – 3(7 – x) = 19$; $x = 5$ Отже, Сашко правильно розв'язав **5 задач**.
	4.	**6 пострілів.** Розв'язання. Зрозуміло, що для мінімального кількості пострілів треба, щоб усі влучання окрім 16 були не більше одного разу. Бо інакше, замість таких двох влучань, наприклад, у 4, достатньо одного влучання в 8. Таким чином вибираємо максимально можливу кількість влучань у 16, а далі у кожну меншу не більше одного влучання, таким чином усього найменше **6 пострілів**.
	5.	**25 трикутників.**
8	1.	Поставити два годинники одночасно. Через 7 хвилин починати варити яйце. У другому годиннику пісок ще буде сипатись 4 хвилини. Після цього перевернути другий годинник і виміряти ще 11 хвилин.
	2.	$9999^{10} = [99\,(100+1)]^{10} = 99^{10} \cdot 101^{10}$; $99^{20} = 99^{10} \cdot 99^{10}$, очевидно, що $\mathbf{99^{10}} \cdot 101^{10} > \mathbf{99^{10}} \cdot 99^{10}$, отже $9999^{10} > 99^{20}$

	3.	***Розв'язання.*** В основі міркувань – діагональ прямокутника розбиває його на два трикутники однакової площі. Проведемо відрізки PC, BS, AR та DQ . Тоді з наведених міркувань: $S_{PBC}=\frac{1}{2}S_{PBCK}=5$, $S_{BSA}=\frac{1}{2}S_{BSAL}=12$, $S_{ARD}=\frac{1}{2}S_{ARDM}=16$, $S_{CQD}=\frac{1}{2}S_{CQDN}=9$. Звідси, площа чотирикутника дорівнює площі цих чотирьох трикутників та площі квадрату $PQRS$. $S_{ABCD}=5+12+16+9+4=46$.  **II спосіб:** $S_{\Delta ARD}=\frac{1}{2}\cdot DR\cdot AR=16$; $S_{\Delta ASB}=\frac{1}{2}\cdot AS\cdot DS=12$; $S_{\Delta BPC}=\frac{1}{2}\cdot BP\cdot PC=5$; $S_{\Delta CQD}=\frac{1}{2}\cdot CQ\cdot QD=9$; $S_{SPQR}=4$. Отже $S_{ABCD}=46$ **III спосіб:** Від площі прямокутника MLKN відняти суму площ прямокутних трикутників, які відтинає даний чотирикутник від цього прямокутника
	4.	Якщо n – кількість зіграних партій, то задача зводиться до розв'язування рівняння (0,1 n+8)+(0,1 (n– (0,1 n +8))+1+8) = n. Звідси **n=20.**
	5.	Розглянемо ΔMED. В нього катет EM вдвічі менше за гіпотенузу MD, тому $\angle EDM=30^\circ$ $\Rightarrow$ $\angle DAB=60^\circ$. Тому друга пара кутів ромба складає 120°. **Відповідь:** $60^\circ, 120^\circ$.
9	1.	**Відповідь: 8 чисел**. Очевидно, що усі цифри числа – парні, бо на останній позиції може стояти лише парна цифра. Якщо серед чисел є одна із цифр 2 або 6, то таке число умову не задовольняє, бо на 4 діляться лише числа із закінченням 12, 32, ...,92 та 16, 36, ...,96 . Тому число має складатися лише з цифр 4 або 8 . Порахуємо їх кількість: З трьох цифр 4 (або 8) -- таке число єдине. З двох цифр 4 та однієї 8 (або навпаки) -- таких чисел три. Разом – 8 чисел.
	2.	***Відповідь:*** 3. Якщо натиснути у будь-якому порядку усі перемикачі ламп одного рядка чи стовпчика, то умову буде виконано. Дійсно, наприклад, ми натиснули по черзі перемикачі для ламп верхнього ряду. Тоді маємо:  Покажемо, що меншою кількістю обійтися не можна. Дійсно, наприклад, натиснули рівно 2 перемикачі. Тоді принаймні в одному рядку не змінила свого стану 1 лампа, так само існує стовпчик, в якому також не була натиснута лампа. На перетині цього рядка та стовпчика лампа – не змінює свій стан.

	3.	Скористаємося формулами для обчислення площ прямокутників та ромба. Нехай сторони прямокутника ABCD рівні a і b, тоді $S_{ABCD} = a\cdot b$, діагоналі ромба рівні сторонам прямокутника, отже $S_{KLMN} = 1/2 d_1 d_2 = 1/2\ a\cdot b$. Сторони внутрішнього прямокутника дорівнюють половинам діагоналей ромба за властивістю середньої лінії трикутника, отже $S_{OPRS} = 1/4\ a\cdot b$. Зафарбована частина становить $ab - 1/2\ ab + 1/4\ ab = 3/4ab$
	4.	**Відповідь: 20, 25, 30, 35 грн.** Нехай у першого було *x* грн., у другого – *y*, у третього – *z*, у четвертого – *t* грн. За умовою складаємо систему рівнянь: $\begin{cases} y+z+t=90 \\ x+z+t=80 \\ x+y+t=85 \\ x+y+z=75 \end{cases}$ Склавши всі рівняння , отримуємо, що $3(x+y+z+t)=330$, отже $x+y+z+t=110$. Віднімаємо від 110 послідовно 90, 85, 80, 75 знаходимо *x, y, z, t*.
	5.	За двома сторонами та прямим кутом між ними маємо, що $\Delta ABM = \Delta AND$. Тоді $\angle FND = \angle EMB$. Оскільки $\angle FDN = \angle EBM$ та $BM = ND$, то $\Delta FND = \Delta EMB$. Тому $FD = BE = 3$ і $BD = 10$. **Відповідь: 10 см**
11	1.	***<u>Відповідь</u>:*** 6. Центральну частину можна пофарбувати в один із трьох кольорів. Тоді всі 12 секторів доведеться фарбувати в інші два кольори, адже кожен із секторів має спільну межу із центральною частиною. Сектор 1 можна пофарбувати у довільний із двох кольорів, а кольори решти секторів встановлюються після цього автоматично: сектор 2 має бути пофарбовано в колір, відмінний від кольору центральної частини і сектора 1; сектор 3 повинен бути пофарбований у колір, відмінний від кольору центральної частини й сектора 2 і т. д. Легко бачити, що таке розфарбування справді задовольнятиме умову задачі, адже пара секторів 12 і 1 також буде розфарбована по-різному. Отже, маємо $3\cdot 2=6$ варіантів розфарбування.
	2.	**Відповідь: 18** . Розв'язання. Позначимо кількість вчителів математиків, фізиків, хіміків та біологів через m, f, h, b відповідно. Тоді маємо такі умови: $\begin{cases} m+f+h+b=30, \\ f+b=\frac{1}{2}m, \\ f+h=2b. \end{cases}$ З другого та третього рівняння маємо: $m=2f+2b$ та $h=2b-f$. Якщо це підставити у перше рівняння, то матимемо, що $2f+5b=30$. Оскільки m, f, h, b – цілі невід'ємні числа, і $2f$ – парне число, то зрозуміло, що b повинно бути парним числом від 0 до 6 . Залишилося

		розглянути ці варіанти. $b=0 \Rightarrow f=15 \Rightarrow m=30 \Rightarrow h=-15$. $b=2 \Rightarrow f=10 \Rightarrow m=24 \Rightarrow h=-6$. $b=4 \Rightarrow f=5 \Rightarrow m=18 \Rightarrow h=3$. $b=6 \Rightarrow f=0 \Rightarrow m=12 \Rightarrow h=12$. З умов задачі, очевидно, що шуканим є варіант, де $m=18$.
	3.	З умови задачі маємо, що $6(a+b)=\frac{25(a+b)}{ab}=25$. Звідси $a+b=\frac{25}{6}$ і $ab=\frac{25}{6}$. Враховуючі, що $a+b=ab$, маємо: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a^2+b^2+2ab-2ab}{ab}=\frac{(a+b)^2-2ab}{ab}=\frac{(\frac{25}{6})^2-2\cdot\frac{25}{6}}{\frac{25}{6}}=\frac{25}{6}-2=\frac{13}{6}$
	4.	Доповнимо перші два члени рівняння до повного квадрата суми: $x^4+10x^3+25x^2-25x^2-125x-54=0$ $(x^2+5x)^2-25(x^2+5x)-54=0$ Зробимо підстановку $x^2+5x=y$. Звідси маємо рівняння $y^2-25y-54=0;\ y_1=27;\ y_2=-2$ $x^2+5x=27$ і $x^2+5x=-2$ $x_1=\frac{-5\pm\sqrt{133}}{2};\ x_2=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$
	5.	***Відповідь.*** $\frac{abc}{ab+bc+ac}$. *Вказівка*. Нехай $A_1B_1B_2C_1C_2A_2$ – шуканий шестикутник ($A_1A_2 \parallel BC,\ B_1B_2 \parallel AC,\ C_1C_2 \parallel AB$). Очевидно, що $\Delta BB_1B_2 \sim \Delta ABC$. Якщо k - коефіцієнт подібності, то $BB_1=kc,\ BB_2=ka,\ B_1B_2=kb$; $AA_1=c-A_1B_1-BB_1=c-k(b+c)$. З іншого боку, $A_1A_2=AA_1\cdot\frac{a}{c}=a\cdot\frac{AA_1}{c}$, тоді $kb=a\left(1-\frac{k(b+c)}{c}\right)$, тобто $k=\frac{ac}{ab+bc+ac}$. Звідси випливає, що $B_1B_2=\frac{abc}{ab+bc+ac}$.

Орієнтовні критерії оцінювання олімпіадної роботи

7	Повне правильне розв’язання завдання
6	Повне правильне розв’язання. Є недоліки, які в цілому не впливають на розв’язання
5	Розв’язання в цілому вірне. Однак воно містить ряд помилок, або не розглянуті окремі випадки. Але воно може стати правильним після невеликих виправлень або доповнень
4	Правильно розглянуто один з істотних випадків, вірно проведене дослідження або пояснення, частково розв’язане завдання
3	Доведені допоміжні твердження, вірно розпочато розв’язування
2	Розглянуто окремі важливі елементи розв’язання, або почато розв’язування завдання з подальшим невірним розв’язком
1	Розв’язуване завдання виконано з грубими помилками, які призвели до неправильного результату або присутня лише ідея розв’язку
0	Початок виконання завдання неправильний або до виконання завдання не приступав